

استدلال در هندسه

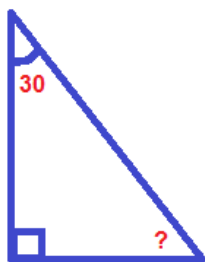
به نام خدا

به فصل سوم کتاب رسیدیم. عنوان این فصل "استدلال و اثبات در هندسه" هست. استدلال یعنی چی؟

یعنی برای حل یه مساله دلیل بیاریم. این دلیل ها رو به کمک دانسته های قبلی مون میاریم.

اگه استدلالی که میاریم ، بتونه درستی مطلبی که میفویایم رو نشون بده بوش اثبات میگیریم.

شکل زیر رو ببینید، فرض کنید از شما خواسته شده که نشون برید اندازه زاویه ای که مجهوله 60 درجه س هست :



دو تا استدلال رو میگیریم، بعد شما بگید که به نظرتون کدوم قابل قبوله:

دانش آموز شماره ۱: به قیافه این زاویه میفوره که 60 درجه باشه 😊

دانش آموز شماره ۲: مجموع زاویه های داخلی یه مثلث ۱۸۰ درجه‌س. اینبا اندازه دو تا زاویه معلومه، بنابراین:

$$180 - (90 + 30) = 180 - 120 = 60$$

پس نتیجه می‌گیریم که اندازه زاویه مجهول ۶۰ درجه‌س.

به نظرتون کدوم استدلال درسته؟

قطعا همه می‌دونید که استدلال شماره ۲ درسته، چون ما با استفاده از دانسته های قبلیمون تونستیم ثابت کنیم که زاویه مجهول ۶۰ درجه‌س.

در واقع ما **استدلال** آوردیم و مطلب مورد نظر رو **اثبات** کردیم.

حالا میفوییم با روشهای اثبات کردن در هندسه آشنا بشیم:

اولین نکته ای که باید بهش توجه کنیم اینه که ما برای ثابت کردن یه مساله باید از دلیل های منطقی و قانع کننده استفاده کنیم و با استدلال، درستی یه مطلب رو نشون بدیم:

برای این منظور دو تا مفهوم رو باید خیلی دقیق بفهمیم:

فرض مساله: اطلاعاتی که مساله به ما میده

حکم مساله: خواسته ای که مساله از ما میفواد

خب توی مساله قبلی که اثبات کردیم، فرض و حکم مساله چی بود؟

گفتیم فرض مساله، اطلاعاتیه که مساله به ما میده، اینبا مساله چه اطلاعاتی به ما داده بود؟ هرر چیزی که به ذهنتون میرسه رو بنویسید:

فرضهای مساله:

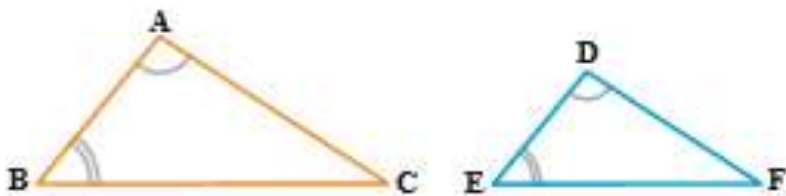
اول اینکه مثلث ما قوائم الزاویه‌س. بنابراین یکی از زاویه‌هاش 90° درجه‌س
 دوم اینکه یکی از زاویه‌های مثلث 30° درجه‌س. (خود شکل مشخص کرده)
 آیا مساله اطلاعات دیگه ای به ما داده؟ یه چیزی هست که ما از قبل می‌دونیم؛
 مجموع زاویه‌های داخلی یک مثلث 180° درجه است.

حکم مساله چیه؟ چیزی که مساله از ما خواسته که نشون بدیم. بنابراین؛
حکم مساله: اندازه زاویه مجهول 60° درجه است.

مثال:

فرض و حکم را برای مسئله‌های زیر مشخص کنید:

۱- در دو مثلث داده شده زوایای برابر در شکل مشخص شده است. ثابت کنید زاویه‌های سوم از دو مثلث نیز با هم برابر است.



فرض: اطلاعاتیه که مساله به ما داده، بنابراین:

$$A = D$$

$$B = E$$

حکم: چیزی که مساله از ما خواسته که نشون بدیم:

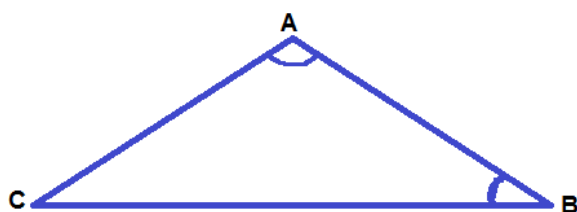
$$C = F$$

مثال بعد:

اگر در یک مثلث دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبرو به زاویه بزرگتر، بزرگتر است از ضلع روبرو به زاویه کوچکتر.

یه توصیه بهتون می‌کنم اونم اینه که هتما برای این سوالها شکل بکشید، چون هم راهنماییتون میکنه که فرض و حکم رو مشخص کنید هم اینکه توی استدلال کردن فیلی بهتون کمک میکنه.

الان باید پی بکشیم؟ یه مثلث با دو تا زاویه نابرابر. فب می‌کشیم:



در این مثلث زاویه های A و B نابرابرن. فرض مساله ما چیه؟ تنها چیزی که مساله به ما میگه اینه:

$$A > B$$

حکم مساله چیه؟ مساله از ما فواسته چی رو نشون بدیم؟

گفته نشون بدید ضلع روبرو به زاویه بزرگتر، بزرگتر است از ضلع روبرو به زاویه کوچکتر

با توجه به شکل این جمله رو بطوری نشون بدیم؟

ضلع روبرو به زاویه بزرگتر چیه اینجا؟ BC

ضلع روبرو به زاویه کوچکتر چیه اینجا؟ AC

پس ما باید چی رو نشون بدیم؟ باید نشون بدیم $BC > AC$

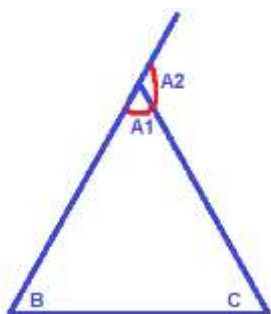
$$BC > AC$$

بنابراین حکم مساله ما اینه:

مثال بعد:

نشان دهید در هر مثلث، اندازه هر زاویه خارجی با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور آن برابر است.

اینجا هم برای اینکه فرض و حکم رو بنویسیم بهتره که شکلش رو بکشیم:



مساله چه اطلاعاتی بهمون داده؟

ما از قبل می‌دونیم که اندازه زاویه های داخلی یک مثلث برابر ۱۸۰ درجه‌س. پس یک از فرضهای مساله ما اینه:

$$A1 + B + C = 180$$

اطلاعات دیگه ای می‌تونیم از شکل به دست بیاریم؟

ما می‌دونیم اندازه زاویه نیم‌صفحه ۱۸۰ درجه‌س، یعنی:



پس با توجه به شکل :

$$A1 + A2 = 180$$

این دو تا فرضهای مساله ما بودن.

کدام مساله پیه؟ مساله از ما خواسته که پی رو نشون بدیم؟

$$A^2 = B + C$$

اینجا قبل از اینکه بحث رو ادامه بدیم، مطالب سال قبل رو یه مرور کوچیک می‌کنیم:

سال قبل با مفهوم شکل‌های هم‌نهشت و حالت‌های مختلف هم‌نهشتی مثلث‌ها آشنا شدیم.

چه وقت می‌گیم دو تا شکل هم‌نهشتن؟

وقتی بتونیم با چندتا تبدیل هندسی، اونا رو طوری بر هم منطبق کنیم که همدیگر رو

کاملاً پوشونن، اونوقت می‌گیم این دو تا شکل هم‌نهشتن.

مطلب بعدی که یاد گرفتیم و امسال هم باهاش سر و کار داریم، هم‌نهشتی مثلث‌هاست،

یه شرایطی وجود داره که اگه اون شرایط برقرار باشن ما می‌گیم که دو تا مثلث با هم

هم‌نهشتن. حالا این حالت‌ها پیا پیا بودن؟

۱. دو زاویه و ضلع بین

اگه دو تا زاویه از یه مثلث با دو تا زاویه از یه مثلث دیگه برابر باشن، و ضلعی

هم که بین این دو تا زاویه قرار داره توی هر دو مثلث برابر باشه اونوقت دو

مثلث هم‌نهشتن. این حالت رو بطور فاصله با **ز ض** نشون میدیم.

۲. دو ضلع و زاویه بین

اگه دو تا ضلع از یه مثلث، با دو ضلع از یه مثلث دیگه برابر باشن و زاویه ای

هم که بین این دو تا ضلع قرار میگیره توی هر دو تا مثلث برابر باشه، اونوقت

می‌گیم این دو مثلث هم‌نهشتن و این حالت رو با **ض ض** نشون میدیم.

۳. سه ضلع

اگر سه ضلع یه مثلث با سه ضلع یه مثلث دیگه برابر باشن اون دو تا مثلث
همنهستن. ما این حالت رو با **ض ض ض** نشون میدیم.
حالا اگر مثلثی ما قائم الزاویه باشن ۲ حالت دیگه هم واسه همنهستی شون وجود
داره:

۱. اگر وتر دو تا مثلث قائم الزاویه و یکی از اضلاع دو مثلث با هم برابر باشن
دو تا مثلث با هم همنهستن. این حالت رو با **ض و ض** نشون میدیم.

۲. اگر وتر دو تا مثلث قائم الزاویه و یکی از زاویه های تند دو مثلث با هم
برابر باشن، دو تا مثلث با هم همنهستن. این حالت رو با **و ز** نشون میدیم.

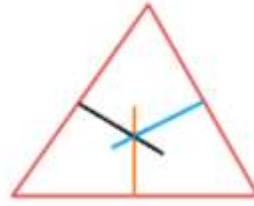
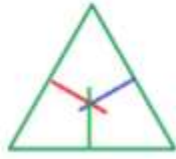
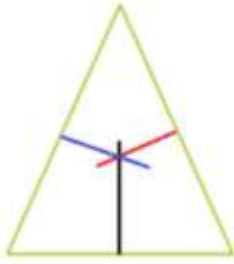
حل تمرین صفحه ۳۵

استدلال

۱- در شکل های زیر عمود منصف های سه ضلع مثلث ها را رسم کنید :

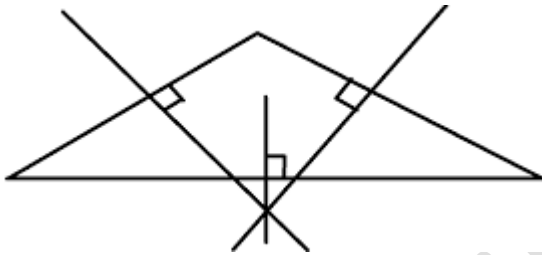


آیا فقط با توجه به این شکل ها، می توان نتیجه گرفت که محل برخورد عمود منصف های هر مثلث
همیشه درون مثلث قرار دارد؟ چگونه می توانید درستی ادعای خود را نشان دهید؟



ما با کشیدن چند تا شکل نمی‌تونیم نتیجه قطعی بگیریم چون همه‌ی حالتها در این شکلهای بررسی نشده.

به عنوان مثال، اگر مثلث یه زاویه منفرجه داشته باشه، اونوقت عمود منصفهای، در خارج از مثلث با هم برخورد میکنند.

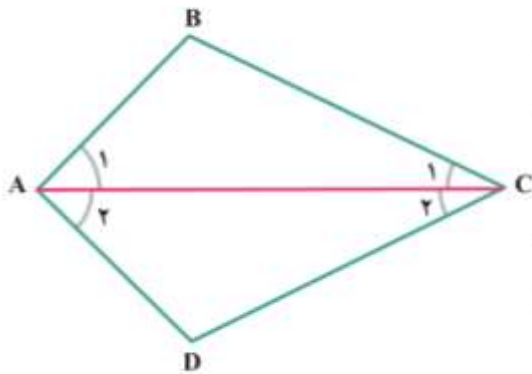


آشنایی با اثبات در

هندسه

تا اینجا با مفهوم فرض و حکم آشنا شدیم، اما چیزی که مهمه اینه که ما باید با یه استدلال درست، با استفاده از فرض مساله، حکم مساله رو ثابت کنیم.

اینکه ما فرض و حکم رو به درستی تشخیص بدیم به تنهایی برای اثبات مساله کافی نیست، چیز دیگه ای که ما لازم داریم یه استدلال درسته.



فرض:

حکم:

۱- در مسئله زیر، فرض و حکم را بنویسید و اشکال استدلال داده شده را بیابید، سپس استدلال درستی برای آن بنویسید.

مسئله: در شکل مقابل پارخط AC نیمساز زاویه A است و اضلاع AB و AD برابرند. ثابت کنید مثلث‌های مثلث ABC و مثلث ADC هم‌نهشت‌اند.

استدلال: چون AC نیمساز است، داریم $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ و از طرفی AC نیز ضلع مشترک در هر دو مثلث است، لذا دو مثلث ABC و ADC به حالت دو زاویه و ضلع بین (ضضز) هم‌نهشت‌اند.

خب بریم ببینیم مساله چه اطلاعاتی به ما داده، جمله به جمله می‌فونیم و هر جا اطلاعات جدیدی دیدیم، به عنوان فرض مساله می‌نویسیمش:

جمله اول: پاره خط AC نیمساز زاویه A است. چه نکته ای داده؟

$$A_1 = A_2$$

این یه فرض بود.

جمله دوم: اضلاع AB و AD برابرند. از این جمله چه فرضی بدست میاد؟

$$AD = AB$$

حکم مساله چیه؟ چی رو باید ثابت کنیم؟

مثلثهای ABC و ABD هم‌نهشت هستند.

حالا ببینیم اشتباه استدلالی که نوشته شده کجاست؟

استدلال: چون AC نیمساز است داریم $A_1 = A_2$ و $C_1 = C_2$

دقیقا اشتباه استدلالی که داده شده اینجاست:

صورت سوال به ما گفته پاره فط AC نیمساز زاویه A است، پس ما فقط می‌تونیم نتیجه بگیریم که $A1 = A2$ ولی اینجا $C1 = C2$ رو هم نتیجه گرفته که اشتباهه.

{اگه صورت سوال گفته بود AC نیمساز زاویه های A و C است، اونوقت این استدلال درست بود.}

حالا که اشکال استدلال داده شده رو پیدا کردیم، بریم فودمون استدلال کنیم و سوال رو حل کنیم 😊. یه بار دیگه فرضهایی رو که فودمون پیدا کردیم می‌نویسیم:

$$A1 = A2$$

$$AD = AB$$

برای اینکه همنهشتی رو ثابت کنیم باید یکی از سه حالت زیر رو اثبات کنیم:

ض ض ض یا ض ض ض یا ض ض ض

یه نکته رو بهتون بگم: هرررر وقت توی همنهشتی مثلثها، دو تا مثلث به هم چسبیده بودن حتما برای استدلال، از اون ضلع مشترکشون استفاده کنید.

الان ضلع AC توی هر دو تا مثلث مشترکه و با هم برابره، بنابراین:

$$AC = AC$$

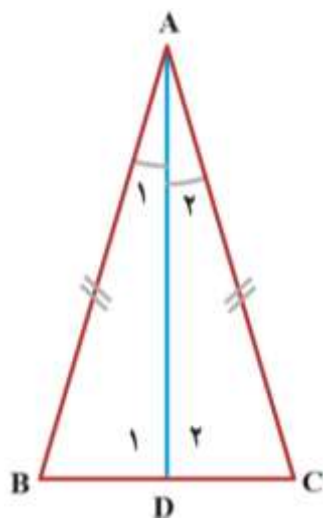
از این سه تا، به کدوم حالت همنهشتی میرسیم؟

دو ضلع و زاویه بین.

پس تونستیم با تشفیص درست فرضها و با یه استدلال درست، حکم مساله رو ثابت کنیم 😊

مثال بعد:

مثلث زیر متساوی الساقین و AD نیمساز وارد بر قاعده آن است. نشان دهید نیمساز وارد بر قاعده میانه نیز می باشد.



قرار ما این بود که جمله به جمله بنویسیم و بینیم چه اطلاعاتی می توانیم از آن به دست بیاوریم:

جمله اول: مثلث ABC متساوی الساقین است.

در نگاه اول ممکنه فکر کنید که این جمله هیچ فرضی به ما نمیده ولی اگه به کوچولو دقت کنید متوجه میشید که این جمله هم اطلاعات به ما میده

اول اینکه مثلث ABC متساوی الساقینه، یعنی دو ضلع AB و AC با هم برابرند، پس فرض اول این شد:

$$AB = AC$$

از طرفی صورت سوال به ما گفته AD نیمسازه، یعنی زاویه A رو به دو زاویه مساوی تقسیم میکنه. پس:

$$A1 = A2$$

تا اینجا به زاویه و به ضلع مساوی پیدا کردیم. با دقت شکل رو نگاه می‌کنیم ببینیم می‌تونیم نکته دیگه ای پیدا کنیم؟

در سوال قبل بهتون گفتم آگه دو تا مثلث به هم چسبیده بودن هتما از اون ضلع مشترک استفاده می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$AD = AD$$

یه بار دیگه فرضها مون رو می‌نویسیم:

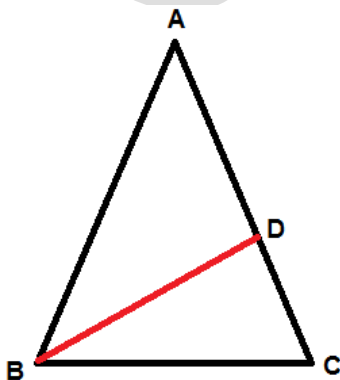
$$AB = AC$$

$$A_1 = A_2$$

$$AD = AD$$

با توجه به این سه فرض، می‌بینیم که دو تا مثلث بنا به حالت ضن ضن با هم هم‌نهشتن. بنابراین $BD = DC$ هست، یعنی نقطه D وسط ضلع BC هست و بنابراین AD میانه ضلع BC است.

آیا می‌توان نتیجه گرفت که نیمساز زاویه B نیز میانه ضلع مقابل آن است؟ باید ببینیم آگه نیمساز زاویه B رو رسم کنیم، باز هم می‌تونیم از فرضهای قبل استفاده کنیم؟



در قسمت قبل از فرضهایی استفاده کردیم که اینجا نمی‌تونیم ازش استفاده کنیم.

مثلا از متساوی‌الساقین بودن مثلث استفاده کردیم و تونستیم نتیجه بگیریم که

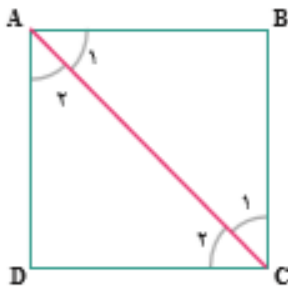
$$AB=AC$$

اما در اینجا این استدلال به دردمون نمی‌فوره .

بنابراین در این شکل نمی‌تونیم ثابت کنیم $AD = DC$. پس BD میانه ضلع AC نیست.

مثال بعد:

مربع $ABCD$ را در نظر بگیرید، نشان دهید قطر AC نیمساز زاویه های A و C است.



ما آگه بتونیم ثابت کنیم که دو مثلث ABC و ADC با هم هم‌نهشتن، اونوقت زاویه $A1$ با زاویه $A2$ برابر میشه و زاویه $C1$ با زاویه $C2$ ، پس می‌تونیم نتیجه بگیریم که AC نیمساز A و C هست.

بریم ثابت کنیم دو تا مثلث هم‌نهشتن 😊 . جمله به جمله می‌نویسیم و فرضها رو پیدا می‌کنیم:

جمله اول: $ABCD$ مربع است. چه اطلاعاتی از این جمله می‌تونیم بفهمیم؟

$$AB = AD$$

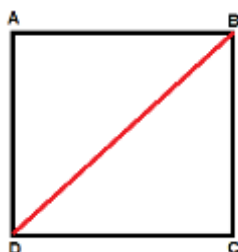
$$BC = DC$$

جمله دیگر ای نداریم، بریم شکل رو نگاه کنیم ببینیم چه کمکی بومون میکنه، ضلع AC بین دو مثلث مشترکه، بنابراین:

$$AC = AC$$

پس دو مثلث با حالت ض ض ض با هم همنوشتن.

آیا می توان با استدلالی مشابه، این فاصیبت را به قطر دیگر نیز تعمیم داد و به طور کلی گفت که در مربع هر قطر نیمساز زاویه های دو سر آن قطر است؟
شکل زیر رو ببینید:



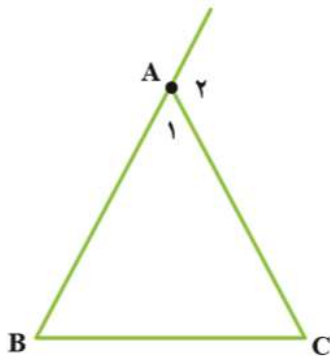
شرایط مساله ما تغییر نکرده و ما همچنان می تونیم از مربع بودن $ABCD$ نتیجه بگیریم که $AB = BC$ و $AD = DC$. ضلع BD هم که مشترکه.

پس این دو مثلث باز هم همنوشتن. پس می تونیم نتیجه بگیریم BD نیمساز B و D همیشه.

وقتی خاصیتی را برای یک عضو از یک مجموعه ثابت کردیم، اگر تمام ویژگی هایی که در استدلال خود به کار برده ایم، در سایر عضوهای آن مجموعه نیز باشد، می توان درستی نتیجه را به همه عضوهای آن مجموعه تعمیم داد.

حل تمرین صفحه ۴۲

اثبات در هندسه



۱- آیا اثبات مسئله زیر معتبر است؟ برای پاسخ خود دلیل

بیاورید.

مسئله: در هر مثلث، اندازه زاویه خارجی با مجموع

اندازه‌های دو زاویه داخلی غیرمجاور با آن برابر است.

اثبات: مثلث متساوی الاضلاع ABC را در نظر می‌گیریم.

می‌دانیم که مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است و زوایای

\hat{A}_1 و \hat{B} و \hat{C} هر کدام 60° است؛ بنابراین

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ \rightarrow \hat{A}_2 = 180^\circ - \hat{A}_1 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

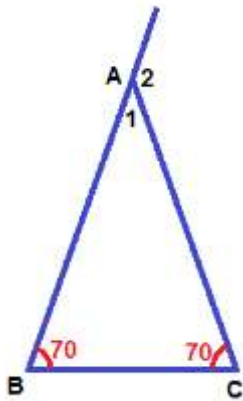
$$\hat{B} + \hat{C} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C}$$

اگر صورت سوال گفته بود که این مساله رو برای مثلثهای متساوی الاضلاع اثبات کنید اونوقت این استدلال کاملا معتبر بود ولی این استدلال برای این سوال معتبر نیست.

یه نکته ای رو فیللی دقت کنید، وقتی قراره ما یه مطلب رو برای یه حالت کلی اثبات کنیم، اجازه نداریم یه حالت خاص رو برای اثبات کردن انتخاب کنیم. یعنی چی؟

اینجا به ما گفته در "**هر مثلث**" این مطلب رو ثابت کنید، پس ما اجازه نداریم یه مثلث خاص رو برای اثبات انتخاب کنیم و این اشتباهیه که اینجا اتفاق افتاده و مساله رو برای یک مثلث متساوی الاضلاع اثبات کرده.

برای اینکه بهتر متوجه توضیحاتی که گفتم بشید، شکل زیر رو در نظر بگیرید:



آیا استدلالی که بالا مطرح شده برای این مثلث قابل استفاده‌س؟ فکر کنید. پس می‌بینیم که این استدلال فقط در مثلثهای متساوی‌الاضلاع درسته.

ادامه تمرینها رو می‌تونید در "کانال خصوصی حل تمرین و نمونه سوال" ببینید ☺

در صورت تمایل به عضویت، به ادمین کانال مراجعه کنید.

آموزش گام به گام ریاضی چهارم تا دهم در سایت:

www.riazibaham.ir

و کانال‌های @RiaziBaHam و @RiaziBaHam9

برای دریافت جزوات سایر پایه‌ها، تمرینهای حل شده و نمونه سوالات

امتمانی حل شده، به "ریاضی با هم" پیوندید.